ISMAELIS BVLLIALDI EXERCITATIONES GEOMETRICÆ TRES.

I. Circa demonſtrationes per inſcriptas & circumſcriptas figuras.
II. Circa conicarum ſectionum quaſdam propoſitiones.
III. De Poriſmatibus.

ASTRONOMIÆ PHILOLAICÆ FVNDAMENTA clariùs explicata, & aſſerta
Aduersùs Clariſſ. Viri SETHI WARDI *Oxonienſis Profeſſoris impugnationem.*

PARISIIS,
Apud SEBASTIANVM CRAMOISY Regis ac Reginæ Architypographum :
Et GABRIELEM CRAMOISY, viâ Iacobæâ, ſub Ciconiis.

M. DC. LVII.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

SERENISSIMO
AC CELSISSIMO PRINCIPI

GASTONI

FRANCIÆ,

CHRISTIANISSIMI REGIS PATRVO,
DVCI AVRELIÆ, &c.

ISMAEL BVLLIALDVS S.P.D.

SERENISSIME AC CELSISSIME PRINCEPS,

Orbis nostri Gallici miraculum, qui per longam & ab antiquissimis temporibus deductam generis tui Regij seriem, inter plurimos Principes exortus, cœlum vnus adspicis; & originis Tuæ sedes mente ac intellectu ad sublimia euectus repetis, ipse ego vestigia tua legens ad res

cœleſtes contemplandas ab ipſa natura quaſi manu ductus, ad Celſitudinem Tuam Regiam quoque accedo. In illis Vraniæ atriis, è quorum laquearibus ignes æterni dependent, in ſanctis adytis, conſecratiſque ſeceſſibus illis, quos penetrare prophanis haud conceſſum, ad Celſitudinem Regiam Tuam facilem aditum, & mollia fandi tempora ſum inuenturus. Officiis enim, quæ Natalium tuorum ſtatus & ſplendor, à Celſitudine Regia Tua exigunt, vbi functus es, naturæ tuæ indolem ætherei ſpiritus illuc propellunt, vnde in te delapſi fluxere. Et vt à curis grauioribus, quibus te ſors naſcendi implicuit, animum recrees, Aſtronomiæ ſcientiarum omnium nobiliſſimæ, quæque Principes maximè decet, arcana inquiris, maxima cum animi voluptate de illis diſſerentes audis; Aſtronomicum ſtudium iam promoues, & qui ſe illi applicant, eis faues, Téque hortante ac præſente cœlum apud te colitur & obſeruatur. Duas poſtremas coram Celſitudine Tua Regia eiúſque iuſſu diligenter obſeruatas Solis Eclipſes, huiuſce tui erga Aſtronomiam affectus teſtes luculentos habemus. Perge feli-

citer, SERENISSIME PRINCEPS, *& nomen tuum immortalitati etiam conſecra, qui animum immortalem à Deo accepiſti. Nulli characteres durabiliores, nulli clariores, quàm illa cœleſtia lumina; cœlorum firmitudini ac conſtanti durationi marmora cedunt; Nomen itaque tuum orbibus cœleſtibus, Aſtronomiæ ſtudium fouendo, inſcribe. Temporis organa ſunt perpetua, quæ nuſquam vſu, nuſquam rubigine teruntur, interea dum quæcumque nata ſunt, ad interitum deducunt, & obliuione conterunt. In Heroïcis virtutibus tuis, & in Aſtronomiam amore tuo fiduciam tantam habeo, vt nouas aliquot demonſtrationes Geometricas Exercitationibus tribus comprehenſas Celſitudini Tuæ* Regiæ *afferre audeam. Nouam præterea, nec ſine aliquo ingenio fabricatam cœleſtem machinam adduco, Ellipſim in cono ſic ſectam, vt abſque ipſa, appoſitiſque per me axibus & rotis motuum cœleſtium veritas calculo repræſentari nequeat. Compagem illius hiatu paruulo laxatam, totam luxare ac demoliri quidam aggreſſi ſunt, verùm labanti opportunè ſubueni; támque aptè compactam illam, eiúſ-*

que commiſſuras tam egregiè agglutinatas præſtiti, vt veritate firmiter ſubnixa, nullis cauillationibus quaſſari aut euerti poſſit. Me quoque à malignorum inuidia tutum & ſecurum putabo, ſi Celſitudo Tua Regia inter clientes ſuos admittere velit, ac tanto honore auctum tueri. Hoc vt facias, SERENISSIME PRINCEPS, *Muſæ te prenſant, Vrania ambit, & deuotiſſimum ac addictiſſimum, Tuámque Celſitudinem Regiam ſummo cultu venerantem me Tibi adducunt. Vale.*

Scribebam Lutetiæ Pariſiorum die 18. Octobris 1656.

EXERCITATIO I.

CIRCA DEMONSTRATIONES per inſcriptas & circumſcriptas figuras.

AD LECTOREM.

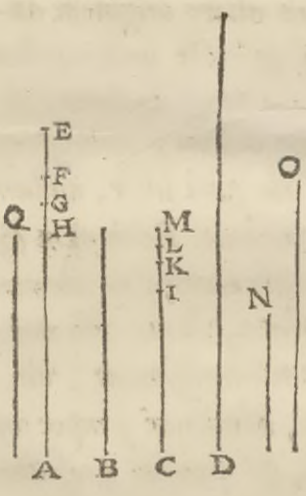
ANNO 1654. *liber à R. P. Andrea Tacquet Soc. Ieſu editus ex Belgio Lutetiam allatus eſt.* Elementa Geometriæ planæ ac ſolidæ *illi titulus eſt, quem vbi euolui, hunc virum ingenioſiſſimum, in eandem ferè methodum ad demonſtrationes quaſdam per inſcriptas & circumſcriptas figuras faciliùs perficiendas, ac ante annos nouem ego deueneram, incidiſſe comperi. Vtriuſque noſtri* εὑρήματα, *quandam equidem inter ſe ſimilitudinem ſeruant; neutrum tamen ab altero originem duxiſſe, vt verum eſſe hîc aſſero; ſic omnibus rectè iudicantibus manifeſtum fore ſpero. Mea, cùm hactenus apud me latuerint, ſolertiſſimo Tacqueto ignota fuiſſe, viámque ei non præmonſtraſſe, certiſſimum eſt. Sed & mihi lectus illius viri liber, nullam mutandi quicquam in meis occaſionem præbuit. Benignum & æquum Lectorem hac de re monitum propterea volo; ne aut rem ab alio actam agere, aut aliena, interpolata ſolùm, pro nouis méiſque venditare videar. Quod tanquam turpiſſimum, viróque ingenuo & cordato indignum facinus, admittere ſemper vitaui: & pauciora, dummodo mea ſint, & publico profutura*

potiùs proferre, quàm ingentia volumina, alienarum opum furtis congeſtis in molem adſurgentia famoſam, ſcientiarum porro limites haud prolatura, conſarcinare ſtudui.

PROPOSITIO I.

SI ad aliquam magnitudinem datam duæ magnitudines comparentur, quarum vna infinitarum partium ablatione decreſcat; altera infinitarum partium additione augeatur, & ad æqualitatem magnitudinis datæ magis magíſque accedant, & in eodem progreſſionis termino ad eam perueniant; ipſarúmque altera quantumuis imminuta ad aliam magnitudinem, ſemper maiorem, quàm æqualitatis, rationem teneat; altera quantumuis aucta minorem, ad æqualitatis verò rationem magis ac magis accedant. Magnitudo ad quam comparantur duæ magnitudines, æqualis erit illi, ad quam maior quantumuis imminuta maiorem, quàm æqualitatis, rationem ſemper tenet; minor verò quantumuis aucta minorem quàm æqualitatis rationem ſemper tenet.

DEMONSTRATIO.



MAGNITVDO data ad quam fit comparatio, ſit B. magnitudines comparatæ A E, C I. & AE maior partium infinitarum EF, FG, ablatione decreſcat. & minor CI infinitarum partium I K, K L additione augeatur, & ad æqualitatem datæ B magis ac magis accedant, eámque in eodem progreſſionis termino adſequantur, cùm eam adſequentur, non ſeruata etiam eadem proportione antecedentis E F ad F G, aut I K ad K L. vel etiam eadem quæ eſt EF ad IK. Imminuta autem A E in in infinitum maiorem teneat rationem ad

ad Q quàm æqualitatis. aucta verò CI in infinitum minorem rationem teneat ad eandem Q quàm æqualitatis. Dico, quòd magnitudo B, ad quam cōparantur duæ magnitudines & ad cuius æqualitatē magis ac magis accedunt, æqualem esse magnitudini Q.

Æquales factæ sint inter se imminuta AE, & aucta CI, & sint tunc AH, CM, æquales sint etiam factæ magnitudini B, si tunc non teneant ad Q rationem æqualitatis, vel maiores vel minores ipsa B magnitudine factæ tenebunt. Maiores factæ rationem æqualitatis primùm teneant si fieri potest. tunc maior AE quàm B rationem æqualitatis ad Q tenebit; quod est contra hypothesim. tunc enim posita est AE maiorem habere rationem ad Q quàm æqualitatis. maior quoque facta esset CI quàm B, & ad Q maiorem teneret rationem quàm æqualitatis, quod vtrumque etiam est contra hypothesim. Non erunt ergo singulæ AE, CI maiores magnitudine B, quando rationem æqualitatis tenebunt ad magnitudinem Q.

Sed si fieri potest, teneant rationem æqualitatis ad Q, minores factæ quàm B. tunc CI minor quàm B, ad Q tenebit rationem æqualitatis, quod est contra hypothesim; nam minorem rationem tunc habere ad Q; posita est CI. & AE minor facta esset quàm B, & ad Q minorem teneret rationem quàm æqualitatis. quod vtrumque est etiam contra hypothesim. Non erunt ergo AE, CI minores magnitudine B. quando rationem æqualitatis tenebunt ad Q. Ergo magnitudines AE, CI ad magnitudinem Q rationem æqualitatis tenebunt, quando æquales erunt magnitudini B. ergo B ad Q rationem tenet æqualitatis, & ideo B, & Q æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

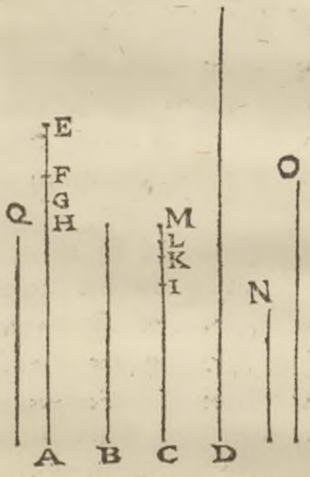
PROPOSITIO II.

SI duæ sint vt in antecedenti magnitudines AE, CI ad aliam B comparatæ. & maior AE in infinitum imminuta maior sit quàm B. & minor CI in infinitum aucta minor sit quàm B. ipsa verò AE sic imminuta semper sit in ratione maiori ad D, quàm N ad O. simúlque CI in infinitum aucta sit in ratione minori ad D, quàm N ad O. Dico magnitudinem B tenere rationem ad D eandem, ac tenet N ad O.

DEMONSTRATIO.

ÆQVALES factæ AE, CI inter se & datæ B sint AH, CM. si tunc non teneat vtraque ad D eandem rationem,

ac N ad O. vel maiores vel minores ipsa B factæ tenebunt. teneant si fieri potest, quando maiores erunt. tunc maior AH quàm B eandem rationem tenebit ad D, ac N ad O. quod est contra hypothesim, eo quòd maiorem tunc tenere AH posita sit. facta etiam maior CI quàm B, maiorem teneret ad D rationem, quàm N ad O. quæ minorem semper habere posita est. vtrumque igitur est contra hypothesim. Maiores itaque quàm B, positæ A H, CM eandem ad D rationem non tenent singulæ, quam N ad O.



Sed si fieri potest minores factæ AC, CI quàm B eandem rationem teneant ad D, quam N ad O. tunc maior AH minor facta quàm B, eandem rationem tenebit ad D, quam N ad O, quod est contra hypothesim. nam & maiorem semper habere posita est; & minor facta quàm B minorem haberet rationem ad D, quàm N ad O. CI verò minor quàm B, eandem rationem teneret ad D, quam N ad O. quod est etiam contra hypothesim, nam minorem ad D rationem tenere tunc posita est. Minores itaque quàm B, factæ AE, CI, eandem rationem non habent ad D, quam N ad O. ergo AE imminuta & CI aucta eandem rationem ad D tenebunt, ac N ad O, quando æquales B fuerint factæ. quare B ad D, eandem rationem tenet, ac N ad O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

SI duæ fuerint magnitudines ad aliam comparatæ, quarum vna maior imminuatur subtractione partium excessus in ratione submultipla continua. altera minor augeatur additione partium defectus in eadem submultipla ratione continua, & ad ipsius æqualitatem magis ac magis in infinitum accedant. si possibile esset eas magnitudini, ad quam comparantur, additione ac subtractione æquales fieri; simul, id est in eodem progressionis termino continuæ additionis ac subtractionis æquales fierent.

DEMONSTRATIO.

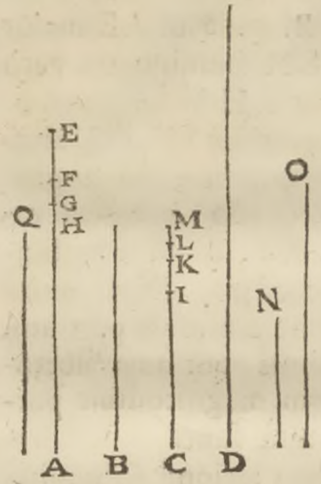
SINT AE, CI comparatæ ad aliam B. quarum AE maior excedat magnitudinem B quantitate EH. imminuatur verò subtractione in infinitum partium excessus EH in ratione submultipla, vt subdupla, continua, nempe partium EF, FG. altera verò CI minor quàm magnitudo B, quantitate IM augeatur additione in infinitum partium defectus IM, in eadem ratione submultipla continua, nempe IK, KL. & ad æqualitatem B propiùs ac propiùs in infinitum accedant. Dico, quòd illæ magnitudines subtractione & additione eiusmodi partium, simul, id est in eodem termino progressionis continuæ subtractionis & additionis partium, æqualitatem magnitudinis partium adsequentur, quando illam adsecuturæ sunt. Videatur fig. pag. 10.

Cùm enim partes excessus EH in eadem ratione submultipla acceptæ sint, ac partes defectus IM. erit EF ad FG, vt IK ad KL, & sic deinceps in infinitum, in eadémque ratione erit residuum GH ad residuum LM. ac EG ad IL. & in residuo GH tot sunt progressionis termini, quot in residuo LM. in eadem ergo ratione distabunt puncta G, L, à punctis H M. In vno itaque & eodem progressionis termino, id est simul, æquabuntur magnitudini B, imminuta AE & aucta CI, quando æqualitatem adsecuturæ sunt. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IV.

SI duæ sint, vt in antecedenti, magnitudines AE, CI ad B comparatæ, & sit AE maior, CI verò minor. & sit EH id quo AE excedit B. sit verò IM id quo CI deficit à B. & in ratione submultipla partium excessus EH imminuatur AE; simul verò augeatur CI in eadem ratione submultipla partium defectus IM. & ad æqualitatem magnitudinis B in infinitum accedant. posita magnitudo B, ad quam comparantur, rationem habebit datam ad aliam magnitudinem D, ad quam etiam primò positarum magnitudinum altera, quantumuis imminuta maiorem rationem data ratione tenet; altera quantumuis aucta, minorem semper rationem tenet. est autem ratio data N ad O.

DEMONSTRATIO.



ÆQVALES factæ ſint AE, CI inter ſe ſubtractione & additione, & factæ AH, CM, æquales etiam magnitudini B. ſi tunc non teneant ſingulæ ad D rationem eandem ac N ad O. vel maiores vel minores magnitudine B factæ tenebunt. ſed propoſit. 2. huius oſtenſum eſt, neque maiores neque minores factas, eſſe ad D in ratione N ad O. quare etiam in eadem ratione fore ad D quando æquales erunt ipſi D. demonſtrationis enim medium idem eſt; etſi in ſecunda propoſit. ſubtractio ac additio partium exceſſus ac defectus in eadem ratione ſubmultipla poſitæ non ſint. ſed in illa, vt in hac, in eodem progreſſionis termino, & ſimul æquari B, poſitæ ſunt AE, CI.

Sed directè etiam idem demonſtrari poteſt. Cùm ergo AE, CI ad æqualitatem magnitudinis B tendant, & AE quantumuis imminuta maior ſit quàm B. CI verò quantumuis aucta minor ſit quàm eadem B. ſimúlque AE maiorem rationem ſemper teneat ad D, quàm N ad O. altera verò magnitudo CI ſimul minorem rationem ſemper teneat. facta ſit CM maior quàm B; ipſa imminutæ AE æqualis in aliquo puncto fiet, túncque ad D maiorem tenebit rationem quàm N ad O. cùm AE per ſubtractionem imminuta & æqualis facta CI, quæ per additionem aucta eſt, maiorem rationem ad D ſemper teneat quàm N ad O maior exiſtens quàm B.

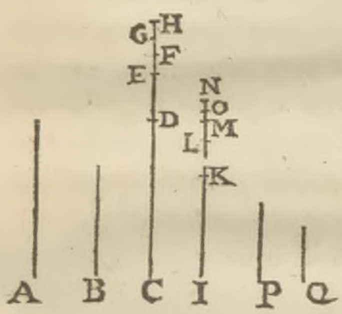
Facta ſit verò AE minor quàm B, ipſa auctæ CI æqualis in aliquo puncto fiet, túncque minorem ad D tenebit rationem quàm N ad O. cùm CI per additionem aucta, & æqualis facta AE, quæ per ſubtractionem imminuta eſt, minorem rationem teneat ad D, quàm N ad O, minor exiſtens quàm B. conuertitur ergo in puncto æqualitatis cum B, ratio maioris inæqualitatis AE ad D, ad rationem minoris inæqualitatis; & vice verſa ratio minoris inæqualitatis CI ad D conuertitur ad ra-

tionem maioris inæqualitatis in puncto æqualitatis cum B. ergo B ad D est in ratione N ad O. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO V.

SI fuerint duæ primò positæ magnitudines, quæ rationem inter se teneant eandem, quam habet magnitudo data ad datam magnitudinem; ipsæ verò infinitarum partium additione auctæ, eandémque interim rationem seruantes, ad duarum aliarum secundò positarum magnitudinum æqualitatem magis magísque accedant, & ad eam simul, id est in eodem progressionis termino, perueniant, cùm eam adsequentur. Secundò positæ magnitudines, ad quarum æqualitatem magis ac magis in infinitum primò positæ magnitudines accedunt, rationem eandem inter se, ac magnitudo data ad datam tenebunt.

DEMONSTRATIO.



SINT primò positæ duæ magnitudines A, B, quæ rationem inter se habeant, vt P ad Q. ipsæque simul auctæ in proportione qualibet submultipla continua, additis partibus incrementorum totalium DH, KN, veluti in subdupla DE, EF, FG in DH; itémque KL, LM, MO, in KN; eandem inter se rationem seruent. & sint secundò positæ magnitudines CH, IN. ad quarum æqualitatem simul perueniant A, B, quando eam adsequentur. Dico quòd secundò positæ magnitudines CH, IN, ad quarum æqualitatem magis ac magis in infinitum auctæ accedunt primò positæ A, B, rationem inter se tenent eandem, ac magnitudines P, Q. hoc est CH esse ad IN; vt P ad Q. Cùm enim magnitudines A, B, seu illis æquales CD, IK, auctæ eandem inter se rationem seruent; & simul, id est in eodem termino progressionis additarum partium, perueniant ad æqualitatem CH, IN; erit, vt CD, ad CE; ita IK, ad IL; & CF ad IM; & CG, ad IO; & inuertendo, vt CG ad CD; ita IO ad IK, & diuidendo, vt CD, ad DG; ita IK, ad KO; quoniam

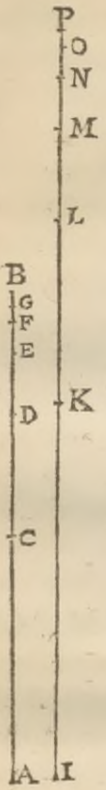
verò C D, I K ſimul peruenient ad æqualitatem magnitudinum C H, I N; id eſt in eodem progreſſionis additarum partium termino; eadem vbique erit proportio diſtantiæ ab æqualitatis terminis H, N, cùm tot partes ſimiles in vna diſtantia ſint, ac in alia. quare erit G H, diſtantia C G ab æqualitate magnitudinis C H, ad D G; vt O N, diſtantia I O ab æqualitate I N, ad K N. ergo tota D H, ad totam K N in eadem erit ratione ac C D ad I K. quare & tota C H erit ad totam I N. vt C D ad I K. id eſt vt P ad Q. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

SI ab aliqua magnitudine auferantur partes in infinitum in ratione ſubmultipla continua. quæ ablatæ in ſerie continua poſitæ, ad alias etiam in ſimili ſerie magnitudines (quæ ſimul additæ ad vnius magnitudinis æqualitatem magis ac magis accedant) eandem ſemper rationem (prima ſcilicet ad primam, ſecunda ad ſecundam) ſeruent; ſimúlque, & in eodem progreſſionis termino, prima magnitudo ſubtractione partium abſumatur, & ſecunda additione partium compleatur. magnitudo, à qua fit ſubtractio, in eadem erit ratione ad magnitudinem, quæ additione partium infinitarum perficitur; ac partes à prima magnitudine ablatæ & in ſerie continua acceptæ, erunt ad totidem partes additas inter ſe, & in ſimili ſerie continua acceptas, quibus ſecunda magnitudo componitur.

DEMONSTRATIO.

SIT data magnitudo A B, à qua partes in ratione ſubmultipla, vt ſubdupla in infinitum auferantur A C, C D, D E, E F, F G. in ſerie continua poſitæ; quæ rationem eandem teneant ad alias in ſerie quoque continua magnitudines, I K, K L, L M, M N, N O (quæ ſimul additæ ad æqualitatem magnitudinis I P magis ac magis accedant) ita vt A C prima ſit ad I K primam; vt C D ſecunda, ad K L ſecundam. ſimúlque & in eodem progreſſionis termino magnitudo A B partium ſubtractione abſumatur, ac ſecunda I P additione partium I K, K L compleatur. Dico, quòd magnitudo A B, à qua fit ſubtractio partium infinitarum, in eadem eſt ratione ad I P quæ additione partium eiuſdem rationis componitur; ac partes A C, C D,



DE ablatæ ab A & in ſerie continua acceptæ, ad partes totidem IK, KL, LM additas inter ſe, & in ſerie continua acceptas, quibus IP componitur.

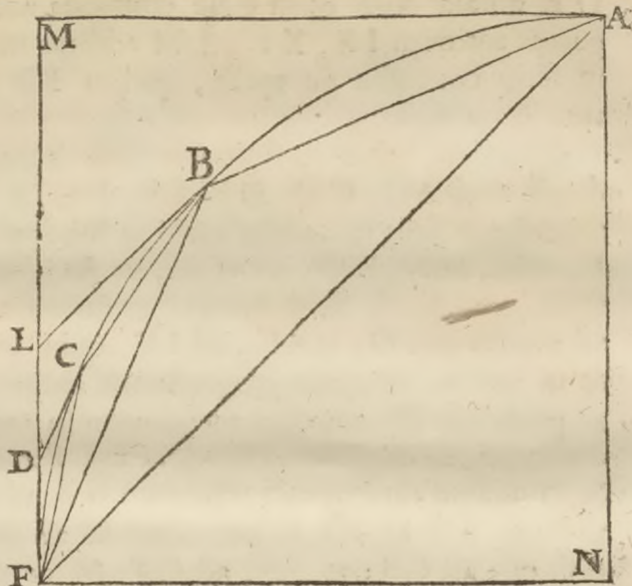
Quoniam igitur in ſerie continua & ratione ſubdupla ſunt AC, CD, DE, EF, FG, & in altera ſerie ſimili ſunt in eadem ratione ſubdupla IK, KL, LM, MN, NO; ita vt ſit, vt AC, ad IK; ita CD, ad KL, & ſic deinceps; erunt omnes in AG, ad omnes in IO; vt AC, ad IK. quia verò ſimul & in eodem termino progreſſionis abſumitur AB, ac perficitur IP. totidem accipientur in ratione ſubdupla partes continuata ſerie, ac in OP accipientur. & in eadem ratione erit reſiduum GB, ad reſiduum OP; ac AG ad IO. & permutando ac inuertendo AG erit ad GB; vt IO, ad OP. & componendo AB erit ad GB, vt IP ad OP. & permutando, AB erit ad IP, vt GB ad OP. ſed vt GB ad OP, ita AG ad IO. ab æquali AB erit ad IP; vt AG, in qua magnitudine partes ſunt quinque, ad IO in qua ſunt quinque ſimiles. Si ergo ab aliqua magnitudine, &c. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

SI à tetragono initio facto polygona inſcribantur, & ſimilia circumſcribantur, atque ſequens laterum numero duplum ſit antecedentis; triangula ſub lateribus inſcripti polygoni, & angulis ſimilis circumſcripti, huiúſque duorum laterum ſemiſſibus comprehenſa, continent exceſſum, quo polygonum circumſcriptum excedit circulum, & defectum, quo inſcriptum deficit ab eodem circulo.

DEMONSTRATIO.

IN quadrante circuli, & polygoni cuiuſque ſectore vno propoſitionem demonſtrabimus. Sit quadrans circuli NABF, latus tetragoni inſcripti AF. latus octogoni BF; heccædecagoni latus CF, quæ polygona duplo laterum numero aucta ſunt.



Sint verò tetragoni circumſcripti, ſemiſſes laterum AM, MF; Octogoni circumſcripti laterum ſemiſſes BL, LF; Heccædecagoni circumſcripti ſemiſſes laterum CD, DF; & latera AM, MF; BL, LF; CD, DF; tangant circulum in punctis, in quibus terminantur anguli inſcriptorum. erit ergo BLF trianguli baſis BF. & trianguli AMF baſis AF; continet autem triangulum AMF trilineum mixtum AMFB. exceſſum circumſcripti tetragoni ſupra circulum; & ABFK ſpatium, contentum arcu ABF & ipſi ſubtenſa AKF, defectum inſcripti tetragoni à circulo. Itémque BLF triangulum ſub latere octogoni inſcripti, & angulo circumſcripti L; eiúſque duorum laterum ſemiſſibus BL, LF continet exceſſum polygoni octogoni circumſcripti ſupra circulum nempe trilineum BLFC. & defectum à circulo octogoni inſcripti, comprehenſum nempe arcu BCF & ſubtenſa BF. & ſic deinceps. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Semper itaque ſuperabit circumſcriptum polygonum circulum, quamdiu ſimile inſcriptum deficiet ab eo. & ſi ad æqualitatem circuli attingere poſſent, ſimul in eodémque progreſſionis termino æquales fierent; id eſt in ſimilibus circumſcriptis & inſcriptis figuris, & à tetragono laterum numero æqualibus. Semper

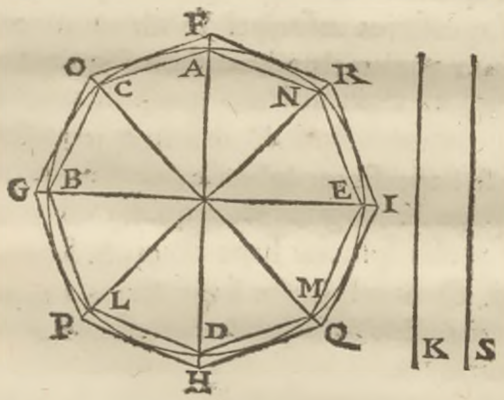
per etenim polygoni inſcripti latus baſis erit trianguli, quod angulum baſi oppoſitum habebit ſimilis circumſcripti polygoni, & duo crura ſemiſſes laterum prædicti circumſcripti; & continebit triangulum illud exceſſum ac defectum. & ſi in aliqua figura inſcripta triangulum illud continens exceſſum & defectum non erit, tunc circumſcripta cum inſcripta & circulo conueniet & æquales inter ſe erunt; dum enim minuitur circumſcripta figura polygona, terminum alium imminutionis non habet, quàm circuli magnitudinem; dúmque augetur inſcripta, alium incrementi terminum non habet quàm eundem circulum, ad cuius æqualitatem accedunt.

PROPOSITIO VIII.

Quæ eſt trigeſima prima libri 1. Archimedis de Sphæra & Cylindro.

CVIVSLIBET *ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt circuli maximi qui in ea accipi poteſt.*

DEMONSTRATIO.



ARCHIMEDES lib. 1. de Sphæra & Cylindro propoſit. 25. demonſtrauit figuræ ſolidæ ſphæræ inſcriptæ ſuperficiem, quæ conicis ſuperficiebus conſtat, minorem eſſe quadruplo maximi ſphæræ illius circuli. propoſitione verò 29. eiuſdem lib. oſtendit figuræ ſolidæ, quæ ſphæræ circumſcripta eſt, ſuperficiem maiorem eſſe quadruplo maximi circuli eorum quæ in ſphæra deſcribuntur. His poſitis, quod proponitur eſt demonſtrandum.

Sit ſphæra ABDE. Solidum ei inſcriptum, quod conicis ſuperficiebus conſtat, concipiatur ACBLDMEN genitum ex

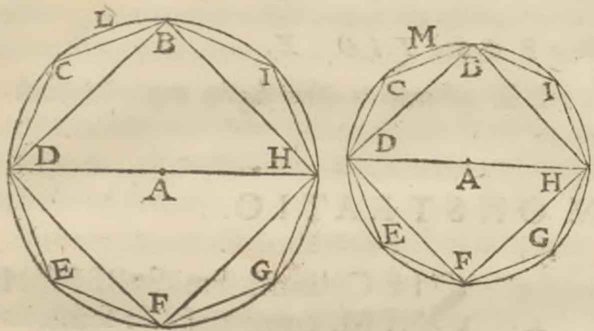
reuolutione octogoni ſuper diametro AD vt axe. concipiatur aliud ſimile ſolidum FOGPHQIR circumſcriptum ſphæræ & genitum ex reuolutione octogoni ſuper dimetiente FH. Sit præterea K magnitudo ſphæræ ſuperficiei æqualis, ad quam comparantur ſuperficies ſolidorum inſcripti & circumſcripti, quæ conicis ſuperficiebus conſtant. Sit S alia magnitudo æqualis quadruplo circuli maximi eorum qui in ſphæra data accipi poſſunt.

Sunt ergo duæ magnitudines nempe ſuperficies circumſcripti ſolidi & inſcripti comparatæ ad K ſuperficiem ſphæræ: quarum altera, nempe circumſcripti FGNI maior eſt ſphæræ ſuperficie: altera, nempe inſcripti ABDE, minor eſt. circumſcripti verò ſolidi ſuperficies, duplicato ſerie continua laterum polygoni numero minuitur, & ad æqualitatem ſuperficiei ſphæræ, hoc eſt magnitudinis K magis ac magis accedit. inſcripti autem ſolidi ſuperficies duplicato quoque laterum polygoni numero augetur, & ad æqualitatem ſuperficiei ſphæræ, hoc eſt magnitudinis K etiam accedit, & ſi æquales fieri poſſent, ſimul æquarentur, vt ex prop. anteced. corollario patet. Imminuta verò quantumlibet ſuperficies circumſcripti ſolidi maiorem ſemper tenet rationem quàm æqualitatis ad S quadruplum circuli maximi eorum, qui in ſphæra ABDE deſcribi poſſunt. aucta verò quantumlibet ſuperficies inſcripti ſolidi minorem ſemper tenet rationem quàm æqualitatis ad eandem S quadruplum circuli maximi. Quare ex demonſtratis propoſitione 1. huius ſuperficies ſolidorum circumſcripti & inſcripti æquales factæ magnitudini K, id eſt ſuperficiei ſphæræ, tenebunt ad S rationem æqualitatis. Quare K magnitudo æqualis eſt magnitudini S. eſt autem K æqualis ſphæræ ſuperficiei, & S quadruplo maximi in ea circuli. Quare ſphæræ ſuperficies æqualis eſt quadruplo circuli maximi eorum, qui in ea deſcribi poſſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

CIRCVLI *ſunt inter ſe in diametrorum ratione duplicata; ſeu vt quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.



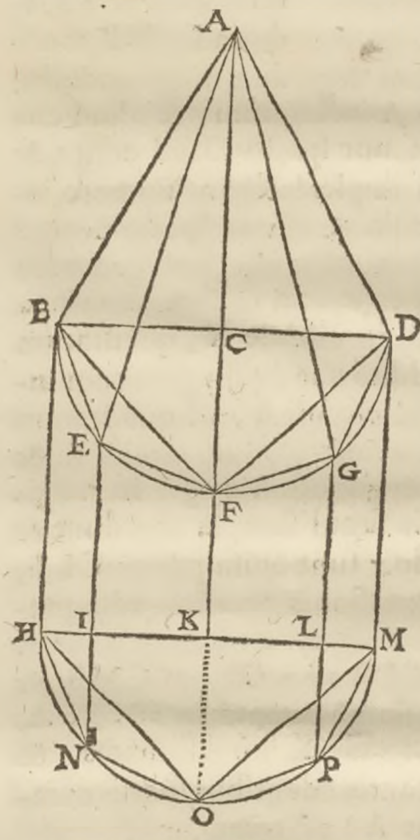
SINT duo circuli inæquales, quorum maior ſit cuius centrum A; minor cuius centrum K. in vtroque ducta ſit diameter D H. Inſcribantur etiã quadrata DFHB, & circa illa octogoni BCDEFGHI. Sunt ergo duæ magnitudines, quadratum nempe DBFH circulo A inſcriptum, & aliud circulo K etiam inſcriptum, quæ creſcunt ſpatiis DCB octies, & aliis ſexdecim, polygono ſequenti duplo laterum numero inſcripto, & ſic deinceps. & in circulo A omnia ſpatia nempe quadratum D H, & ipſi ordine ſuperaddita alia, polygonorum inſcriptione, eandem inter ſe proportionem in ſerie continua accepta ſeruant; ac omnia ſpatia in circulo K, quadratum nempe DH, & ipſi ordine ſuperaddita alia, polygonorum inſcriptione. eſt enim quadratum DH circuli A, ad quadratum circuli K; vt octogonum circuli A, ad octogonum circuli K, & ſic deinceps. inſcriptione verò polygonorum magis ac magis ad circuli æqualitatem ſpatia omnia ſimul ſumpta accedunt & nuſquam illam adſequuntur, reſiduæ ſunt enim partes CLB, CMB; at ſimul & in eodem progreſſionis termino adſequerentur, ſi æquales fieri poſſibile eſſet. Quare ex demonſtratis in propoſitione 5. huius erit reſiduum CLB ad reſiduum CMB; vt omnes antecedentes magnitudines ſimul ſumptæ in circulo A, ad omnes ſimiles antecedentes in circulo K ſimul ſumptas. & tota magnitudo ex reſiduo CLB & antecedentibus ſpatiis compoſita in circulo A. (id eſt circulus A) ad totam magnitudinem ex reſiduo CMB & antecedentibus ſimilibus ſpatiis compoſitam in circulo K (id eſt ad circulum K) vt omnia antecedentia ſpatia circuli A, ad omnia antecedentia ſpatia circuli K; atque etiam vt primum circuli A ſpatium nempe quadratum D H, ad primum circuli K ſpatium nempe quadratum D H. Quare circulus A eſt ad circulum K; vt quadratum

DH circuli A, ad quadratum DH circuli K. Quod erat demonſtrandum. *Centro minoris circuli aſcribi debet K.*

PROPOSITIO X.

OMNIS *Cylindrus triplus eſt coni eandem baſim atque altitudinem habentis.*

DEMONSTRATIO.



SIT Cylindri ſemiſſis BEFDH NPM. cuius baſis ſit ſemicirculus HOP. ſuperficies eidem oppoſita ac parallela ſemicirculus BFD. altitudo illius KC. Sit etiam coni ſemiſſis ABFD. cuius baſis ſemicirculus BFD eadem vel æqualis baſi Cylindri; altitudo autem CA æqualis KC altitudini Cylindri. Dico Cylindrum BFDHOM triplum eſſe coni A BFD.

Baſi ſemiſſis Cylindri inſcribantur polygonorum ſemiſſes, tetragoni HOM, octogoni HNO PM, & ſuperficiei oppoſitæ ſimilium polygonorum ſemiſſes inſcribantur, tetragoni videlicet BFD octogoni BEFGD. & parallelæ ſint BF, FD duabus HO, OM. & latera octogoni BE, EF, &c. lateribus æqualibus HN, NO, &c. rectis exiſtentibus angulis HNI, BEI. Si cylindri ſemiſſis, planis per oppoſita latera BF, HO. itémque FD, OM ductis ſecetur, priſma auferetur ab eo BFDMOH, cuius duæ ſuperficies triangulares oppoſitæ BFD & HOM. parallelæ & æquales inter ſe, tres aliæ BHMD, BFOH, DFOM, parallelogrammæ erunt. ductis deinde planis per latera octogoni BE, EF, & HN, NO priſma

auferetur BHNOFE & ex alia parte aliud æquale DGFOP M. atque inſcriptis ſequentibus polygonis in ratione dupla laterum, priſmata auferentur in infinitum; quæ cùm ſub eadem altitudine comprehendantur, erunt inter ſe vt baſes.

Coni pariter baſi, quæ æqualis eſt cylindricæ vel eadem, ſimiles polygoni inſcripti ſint; & ſecetur conus planis per verticem A, & latera BF, DF ductis, ablatus erit pyramidis quadrilateræ ſemiſſis, nempe pyramis ABFD. quæ baſim eandem atque æqualem altitudinem habet ac priſma BHOMDF; ductis deinde planis per verticem A & latera BE, EF, auferetur pyramis ABEF, eandem baſim ac æqualem altitudinem habens, ac priſma BHNOFE: & ex altera parte pyramis AFGD, quæ eandem baſim atque æqualem altitudinem ac priſma FOPMDG habet. atque inſcriptis ſequentibus polygonis in ratione dupla laterum, pyramides triangulis comprehenſis ſub lateribus vltimi inſcripti polygoni & lateribus antecedentis inſiſtentes in infinitum auferentur; quæ cùm ſub æquali altitudine ſint, inter ſe erunt vt baſes.

Sunt ergo duæ magnitudines, priſma nempe BHOMDF, & pyramis ABF cuius baſis eſt triangularis; creſcit autem priſma duobus additis priſmatibus BEFONH, DGFOPM intra latera tetragoni & octogoni comprehenſis. quatuor deinde priſmatibus comprehenſis inter latera octogoni & polygoni ſexdecim angulorum, & ſic deinceps in ratione dupla. ſúntque priſmata ſub eadem altitudine inter ſe vt baſes; hoc eſt priſma BHOMDF eſt ad priſma BHNOFE, vt baſis BFD ad baſim BEF. & ſic deinceps in infinitum.

Creſcit etiam pyramis ABFD, additis duabus pyramidibus, quæ inſiſtunt triangulis BEF, DFG, tetragoni & octogoni lateribus comprehenſis; & quatuor deinde pyramidibus, quæ inſiſtunt triangulis intra octogonum, & ſexdecim angulorum polygonum comprehenſis, & ſic deinceps in ratione dupla. Súntque omnes ſub eadem altitudine; inter ſe itaque erunt vt baſes. hoc eſt pyramis ABFD eſt ad pyramidem ABEF, vt baſis BFD ad baſim BEF, & ſic deinceps in infinitum. Creſcunt itaque priſmata in eadem proportione ac pyramides: & in ſerie continua ſibi inuicem reſpondent; ſimúlque ad æqualitatem cylindri priſmata, & ad coni æqualitatem pyramides

accedunt, ſimúlque æquarentur, ſi tandem figuræ baſi inſcriptæ inſiſterent, quæ circulum, qui baſis eſt, æquare poſſet. quamobrem ex demonſtratis in propoſitione 5. huius ab æqualitate cylindri diſtabunt priſmata collecta BHOMDF, BHNOFE, DFOPGM in eadem proportione, ac totidem omnes collectæ pyramides ABFD, ABEF, ADGF, ab æqualitate coni diſtabunt, eritque vt ſumma priſmatum, ad differentiam ipſius à cylindro; ita ſumma pyramidum totidem ad differentiam ipſius à cono; & componendo, vt ſumma priſmatum & differentia à cylindro (id eſt cylindrus) ad differentiam, ita ſumma pyramidum ac differentia à cono (id eſt conus ad differentiam, & conuertendo, vt cylindrus, ad ſummam omnium priſmatum; ita conus ad ſummam omnium pyramidum. Sed omnia priſmata tripla ſunt omnium pyramidum. ergo & cylindrus triplus erit coni. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

EXERCITATIO II.

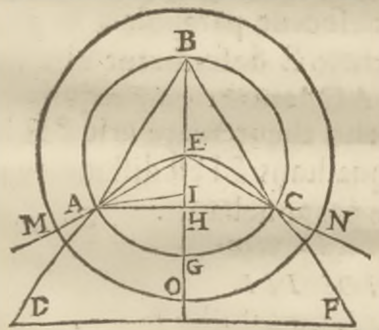
CIRCA CONICARVM SECTIONVM quaſdam propoſitiones.

PROPOSITIO I.

THEOREMA.

SI circulo A B C, cuius centrum E, inſcribatur triangulum æquilaterum ABC; & ab angulo B ducatur in AC diameter perpendicularis B H G, per puncta A E C parabola ſi deſcribatur, cuius vertex ſit E, erit illius parameter ſeu latus rectum BH. vmbilicus ſeu punctum ex comparatione I. Et erit GI ad IE, vt 5. ad 3.

DEMONSTRATIO.



QVIA ABC triangulum æquilaterum eſt, & circulo inſcriptum, erit GH æqualis HE. per ſtructuram autem AEC puncta ſunt in parabola, cuius vertex eſt E; eſt itaque BG circuli diameter & axis parabolæ; quare AH ad BG perpendicularis ordinata eſt in circulo & in parabola. quia ergo eſt in circulo, erit vt BH ad HA, ita HA ad HG. eſt itaque quadratum AH æquale rectangulo BHG; & quia AH ordinata eſt in parabola, erit quadratum AH, æquale rectangulo ſub HE & latere recto. eſt autem HE æqualis HG, ergo latus rectum erit æquale HB. Quod erat demonſtrandum.

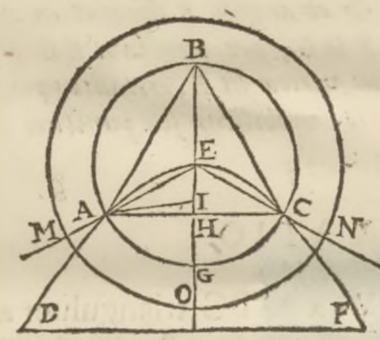
Sed vmbilici I diſtantia à vertice æqualis eſt lateris recti quadranti, id eſt quadranti BH; eſt autem BH æqualis tribus quadrantibus totius BG. ſit ergo BG. 1. erit BH $\frac{3}{4}$. ſed eſt EI quadrans BH, erit itaque totius BG $\frac{3}{16}$. quare cùm BG fuerit 16. erit GH 4. & EI 3. quare GI valebit 5. eſt itaque GI ad IE vt 5. ad 3.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA.

DATIS *axe paraboles & vertice, latus rectum ſeu parametrum & vmbilicum inuenire.*

DEMONSTRATIO.



SIT data ſectio parabola DEF, & eius axis EL, vertex E, propoſitum eſt reperire latus rectum EK. Centro E deſcribatur circulus vt libuerit MON, & ex vtraque parte axis EL, accipiantur arcus hexagoni MO, NO. & à centro E ducantur ſemidiametri EM, EN, quæ producantur donec ſecent parabolam in punctis A, C. deindè diſtantia EA & centro E deſcribatur circulus ABC, & iungantur A, C, erit ipſa AC latus trigoni æquilateri circulo inſcripti. quare ex antecedenti theoremate erit BH latus rectum parabolæ DEF. cuius quadrans EI eſt diſtantia vmbilici à vertice. Quod faciendum proponebatur.

PROPOSITIO III.

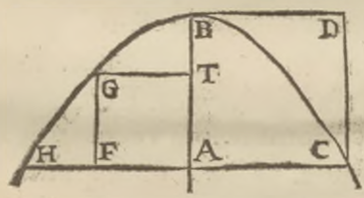
THEOREMA.

SI *data recta linea AB media ac extrema ratione ſecetur in T & ad puncta AB, terminos datæ applicentur ipſi æquales & perpendiculares BD, AC; ad punctum verò T ducatur GT æqualis maiori ſegmento & ad AB perpendicularis; & ad lineam FC, quæ componitur ex tota*

AB

AB ipsiúsque maiore segmento, applicetur rectangulum æquale rectangulo BAT (quod sub tota AB ipsiúsque maiori segmento TA comprehenditur) quod faciat latitudinem HF. & posita HF in directum lineæ FC faciet totam HC. Dico, quòd quatuor puncta H, G, B, C, sunt in parabola cuius latus rectum est BD æquale rectæ AB.

DEMONSTRATIO.



CVm itaque BA secta sit in T puncto in media & extrema ratione; atque ad AB & punctum T ordinata est GT perpendicularis & æqualis AT, erit ipsa GT ordinata in parabola, quæ per puncta GB transibit, cuius axis est BA, vertex B, parameter verò DB. est enim vt AB, id est BD, ad TA, id est TG, ita TG ad TB.

Ad AB & punctum A applicata est AC ipsi AB æqualis & perpendicularis, erit vt AB, ad AC, ita AC ad BD. quare erunt puncta BC in parabola cuius axis AB, vertex B & latus rectum seu parameter BD.

Sed & punctum H in eadem parabola esse ostendemus. Cùm enim factum sit rectangulum HFC æquale rectangulo TAC. erit HFC ad quadratum AC, vt TA ad AB. est autem vt TA ad AB, ita BT ad TA; & inuertendo, vt AB ad TA, ita TA, ad TB; vt autem AB ad TA, ita quadratum AC ad rectangulum TAC seu HFC. erecta itaque cùm fuerit à puncto F recta FG æqualis TA & ad HC perpendicularis puncta HG erunt in eadem parabola ac puncta B, C, cuius vertex B, axis AB & parameter BD. Sed est etiam vt TA ad TB, ita rectangulum TAC ad rectangulum TBD; id est HFC rectangul. ad quadratum GT. quare lineæ GT, FG in eodem puncto G eiusdem parabolæ concurrunt; súntque quatuor puncta HGBC in eadem parabola. Quod erat demonstrandum.

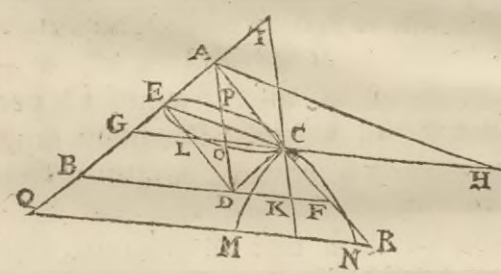
Sequitur HA æqualem esse AC, & sectam esse in F in media ac extrema ratione.

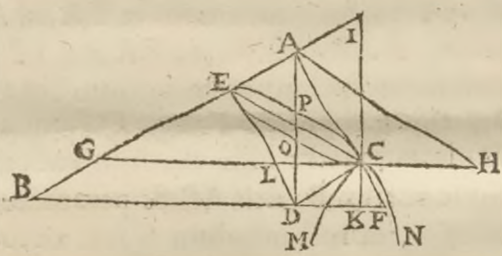
PROPOSITIO IV.
PROBLEMA.

ELLIPSIM & hyperbolam in cono ſecare, ita vt axes inter ſe & latera recta etiam æqualia ſint inter ſe, ſeſéque in verticibus ſectiones contingant.

ANALYSIS.

SIT factum. inuentus ergo eſt conus BAF, in quo hyperbola MCN facta plano ICK, quod trianguli per axem BAF planum ad rectos angulos ſecat; hyperboles axis eſt IC. plano etiam EC ad planum trianguli per axem perpendiculari facta eſt ſectio Ellipſis EPCO, cuius axis tranſuerſus eſt EC, æqualis axi hyperboles IC. & vtriuſque ſectionis latera recta ſunt æqualia, & ſeſe in vertice C contingunt. rectæ IC æqualis & parallela agatur AD, producta quantùm opus fuerit, productis etiam trianguli BAF cruribus AB, AF. ducta recta iungantur puncta ED. & per D ducatur BF, quæ diameter erit circuli qui baſis eſt coni, & æquidiſtans illi BF ducatur GC, quæ diameter erit circuli ad baſim paralleli. quoniam AD æquidiſtat IC eíque eſt æqualis, erit axis tranſuerſus IC ad latus rectum, vt AD quadratum ad BDF rectangulum.





erit etiam EC axis ellipſeos (qui æqualis eſt IC) ad latus rectum vt EC quadratum ad rectangulum æquale rectangulo BDF. poſita eſt AD æqualis & æquidiſtans CI; quare DC erit æqualis AI, & æquidiſtabit BAI. ſunt etiam æquales EC, AD inter parallelas & æquales EA, DC, ergo & ED, quæ terminos

ipsarum iungit, parallela erit AC. sunt autem æquales DC, AI, atque etiam DC, EA; quare AI, EA sunt æquales. sed sunt etiam æquales EC, CI, quare ab AC bisectus erit angulus ECI, atque etiam recta EI bisecta. & recti erunt EAC, CAI. quoniam verò ED, CD (quæ cum AD, BF conueniunt in puncto D) æquidistant lateribus AF, AB, erit GC æqualis BD, & LC æqualis DF. quare GCL rectangulum æquale est rectangulo BDF.

SYNTHESIS.

Componetur autem hoc modo. In cono ad verticem rectangulo BAF, ad quem problema determinatur, facto triangulo per axem BAF; secetur triangulum plano ICK ad illud perpendiculari, quod planum continuatum alteri laterum producto BI occurrat, faciátque hyperbolam MCN, cuius axis transuersus est IC: alio quoque plano perpendiculari idem triangulum BAF secetur, quod vtrique laterum BA, AF non æquidistanter basi aut subcontrariè positum occurrat, faciátque sectionem ellipsim EPCO, cuius axis transuersus EC æqualis sit IC. Dico sectas esse ellipsim & hyperbolam, cuius axes & latera recta sunt æquales, & quæ sese in vertice contingunt.

Cùm enim recti sint anguli EAC, CAI, & æquales EA, AI; si ducatur AD æquidistans IC & ei æqualis, iungatúrque DC, erit DC parallela AI. erúntque etiam æquales AD, EC, comprehensæ inter parallelas AE, DC æquales, quare & ED parallela erit AC. & æquales erunt GC, BD, itémque LC, DF. erit itaque in hyperbola axis IC ad latus rectum, vt quadratum AD ad rectangulum BDK. In ellipsi autem erit axis EC ad latus rectum, vt quadratum EC ad rectangulum GCL. vtrobique autem æqualia sunt quadrata AD, EC, & rectangula BDF, GCL, quare & latera recta æqualia erunt. cùm autem EC, CK sint in eodem plano trianguli per axem. Latus rectum quod ad axes IC, EC applicabitur ad punctum C, perpendiculare erit ad planum prædicti trianguli, & etiam ad ipsos axes; atque adeo sectiones in vertice C continget. quare & in eodem sese sectiones contingent. sectæ sunt ergo ellipsis & hyperbola, vt proponebatur.

Esse autem axem ellipsis EC ad latus rectum, vt quadratum EC ad rectangulum GCL sic ostendemus. à vertice coni A

ducatur AH, quæ basi trianguli per axem facti GC productæ occurrat in H. & æquidistet EC. erit igitur axis transuersus EC ad latus rectum, vt quadratum AH ad rectangulum GHC. propter parallelas AH, EC, est vt AH ad HG, ita EC ad CG. & propter parallelas EL, AC, est vt AH ad HC, ita EC ad CL; per compositionem itaque rationis vt quadratum AH ad rectangulum GHC, ita quadratum EC ad rectangulum GCL, ergo hoc quadratum EC est ad rectangulum GCL, vt axis ellipsis EC ad latus rectum.

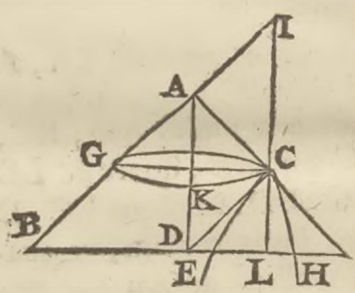
In synthesi autem huius problem. vt sectio subcontraria vitetur, in cono scaleno ellipsis primùm, deinde hyperbola secabitur.

PROPOSITIO V.

PROBLEMA.

CONVM *reperire in quo circulus & hyperbola secentur, & sese in verticibus contingant, quorúmque axes transuersi ac latera recta æqualia sint.*

ANALYSIS.



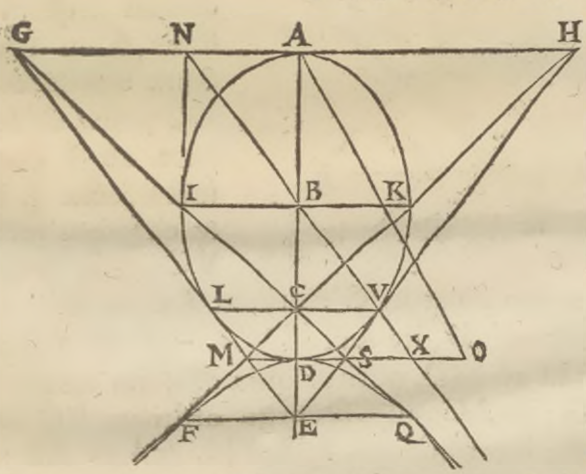
IN cono BAF, sectus est circulus GC, & hyperbola ECH quorum latera sunt æqualia, axes transuersi nempe GC, IC, atque etiam latera recta æqualia. erit ergo æquicrurum GCI triangulum. ducta sit AD æqualis & parallela IC. & iungatur DC, erit DC æqualis AI, & ipsi parallela, atque adeo erit etiam eidem DC æqualis & parallela GA; sed AD est æqualis IC. erunt ergo æquales AD, GC. atque etiam inter se æquales erunt GC, BD, intra easdem parallelas comprehensæ. est in hyperbola axis IC ad latus rectum, vt quadratum AD, ad rectangulum BDF; quare erit in circulo, vt quadratum GC ad æquale rectangulum rectangulo BDF, nempe ad rectangulum GCG, cùm in circulo latus rectum æquale sit axi. sed BD æqualis est GC, ergo BD, DF inter se æquales erunt, cùm sit GC quadratum æquale rectangulo BDF. Conus ergo BAF erit rectus, & AD per centrum circuli BF, qui basis est coni, transibit, & æquales erunt AD, BD.

SYNTHESIS.

Componetur autem, ſecto cono baſi æquidiſtanter & facto circulo GKC, & ducta per ipſius centrum AD æquali GC. à puncto autem C accepta CI occurrens in I producto lateri BA. quæ ſit æqualis AD & ipſi parallela. & per IC ducto plano ICL, & facta hyperbola ECH. & factum erit problema.

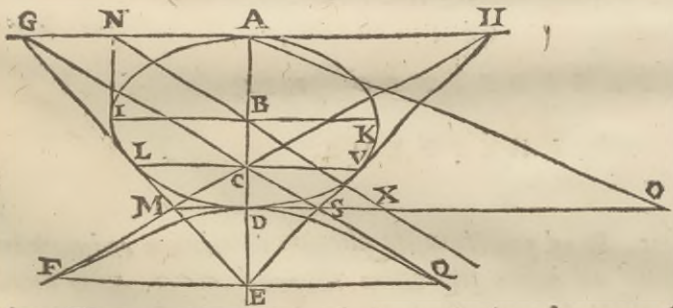
PROPOSITIO VI.

THEOREMA.



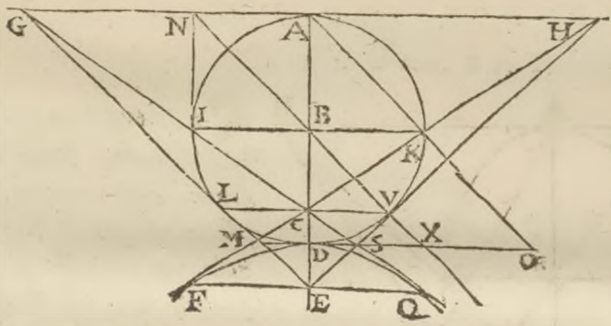
SI adeundem axem, idémque latus rectum deſcribantur in plano ellipſis & hyperbola, vel circulus & hyperbola, quæ ſeſe in verticibus contingant. & in hyperbola ad axem ordinata ducatur, & ad ordinatæ terminum linea hyperbolam tangens; ab altero verò ordinatæ, qui cum axe conuenit, termino ad ellipſim vel circulum ducatur tangens, illæque ambæ tangentes producantur, donec rectæ, quæ per alterum verticem ellipſeos vel circuli ducitur ordinatis æquidiſtans, occurrant; ambæ in vno puncto concurrunt, quod in ducta per alterum verticem ellipſis vel circuli linea recta poſitum eſt.

DEMONSTRATIO.



SINT axis AD & latus rectum DO, ad quæ deſcribantur ellipſis ALDK, & hyperbola FDQ quæ ſeſe in verticibus D contingant; & in hyperbola ad axem AE ordinata ducatur FE, & ad huius ordinatæ terminum F in ſectione duca-

tur hyperbolam tangens FC. ab altero verò termino E, qui cum axe conuenit, ad ellipſim ducatur tangens EV, illæque ambæ tangentes producantur ad GH, quæ per alterum verticem ducta eſt ordinatis æquidiſtans, eíque occurrant. Dico ambas FC, EV tangentes concurrere in vno puncto H, quod in linea GH poſitum eſt.



Per vertices D ducatur MD ordinatis æquidiſtans, & in directum lateris recti DO poſita. & ducatur ab V contactu rectæ EH & ellípſeos recta VC. quia tangit hyperbolem FH, & axem ſecat in C; erit vt AE ad ED, ita AC ad CD; ſed vt AC ad CD, ita AH ad MD. ergo ab æquali vt AE ad ED, ita AH ad MD. pariter quia ellipſim tangit EH; erit vt AE, ad ED; ita AC, ad CD. ergo ordinata VC occurrit AD in C puncto interſectionis AD, FH. ſed vt AE ad ED, ita AH ad DS. In vtraque igitur ſectione eandem rationem habent inter ſe latera rectangulorum AH, MD, & AH, DS. quare ſunt ſimilia rectangula. ſed & vtrobique ſunt æqualia quadranti figuræ ſub lateribus AD, DO, quare & latera MD, DS æqualia erunt, & AH vtrique rectangulo communis erit. Quare FHEH in puncto H, quod in GH ſitum eſt, concurrunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

THEOREMA.

ISDEM *poſitis. Si ad punctum Q alterum terminum ordinatæ in hyperbola ducatur ad ipſam ſectionem tangens QCG. Dico quòd tangentes ESH, QSG ſeſe interſecabunt in puncto quod eſt in latere recto DO.*

DEMONSTRATIO.

CVM enim ad Q, alterum terminum rectæ FQ ordinatæ in hyperbola, ducta sit ad ipſam tangens QCG, ſitque DS æqualis MD, faciet angulum QCE angulo FCE ſimilem & æqualem. quare erit rectangulum AH, MD (hoc eſt AH, DS) in hyperbola, æquale rectangulo AH, DS in ellipſi. ſed AH eſt communis vtrique rectangulo, ergo & DS vtrique communis erit. Quare ESH, QSG in puncto ſe interſecabunt quod in latere recto DO iacet. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VIII.

THEOREMA.

IISDEM *poſitis, ſi ad terminum axis coniugati IK ducatur NI tangens ellipſim vel circulum, quæ occurrat rectæ GH. & ab N puncto occurſus per ellipſis vel circuli centrum ducatur NBX. Dico hanc NBX eſſe hyperboles aſymptoton.*

DEMONSTRATIO.

ERIT enim NI æqualis AB, & NA æqualis IB ſeu BK, quæ poteſt quadrantem figuræ lateribus AD, DO contentæ. tranſit autem NBX per centrum ellipſis vel circuli & MDO æquidiſtat GH, propterea erit triangulum DBX, triangulo NBA æquale & ſimile; ideo erit vt BA ad AN, ita BD ad DX. ergo DX eſt æqualis BK. & poterit BX quadrantem figuræ ſub lateribus; propterea, quæ à centro B per terminum illius ducetur NBX, erit hyperboles aſymptotos. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Hinc conſtat, quod in circulo contingente hyperbolam aſymptotos parallela eſt diametro figuræ ſub lateribus, id eſt BX, & AO æquidiſtant. cùm enim DX, BK ſint inter ſe æquales, atque etiam AD, DO inter ſe æquales, & BK ſit ſemiſſis DO, erunt æquales BK, XO. eritque vt AD ad DO, ita BD ad DX; quare BX, AO æquidiſtant.

At in ellipſi contingente, ſi axis latere recto maior ſit, vt in

prima figura; erit DX maior semisse DO, cùm media proportionalis sit inter BD & semissem DO. non erit ergo vt AD ad DO, ita BD ad DX. maiorem quippe DX habet rationem ad DB, quàm DO ad DA, cùm DB sit semissis DA, at DX maior quàm semissis DO. minórque est XO quàm BT. ergo productæ AO, BX infra BO ad partes hyperbolæ conuenient.

Si verò axis minor sit latere recto, tunc erit DX minor semisse DO. & propterea NA æqualis DX, minor erit BT. concurrent ergo AO, NX ad partes ellipseos supra rectam GH.

PROPOSITIO IX.

THEOREMA.

IISDEM *positis. Si ab A termino axis transuersi AD, ad punctum S communis intersectionis tangentium EH, QG, vel DO, EH ducatur recta ASZ, quæ ordinatas ad axem in ellipsi & hyperbola; vel circulo & hyperbola à puncto contactuum secet.* Dico *quod ordinatas CV, EQ in punctis RZ ipsa bisecat.*

DEMONSTRATIO.

EST enim in ellipsi vel circulo, vt HM ad MS, ita HC ad CV; & permutando vt HM ad HC, ita MS ad CV. sed est etiam vt HM ad HC, ita AD ad AC. quare ab æquali vt AD ad AC, ita MS ad CV. est autem vt AD ad AC, ita DS ad CR; atqui est DS semissis totius MS, ergo & CR totius CV semissis erit. Quare bisecta est CV in R.

Eadem erit demonstratio in hyperbola. est enim vt HF ad HM. ita FE seu EQ ad MS. vt autem HF ad HM, ita AE ad AD. ergo ab æquali, vt AE ad AD, ita EQ ad MS. sed est etiam vt AE ad AD, ita EZ ad DS. & inuertendo vt AD ad AE, ita DS ad EZ. est verò DS semissis totius MS. ergo & EZ semissis erit totius EQ. bisecat ergo recta AZ ordinatas CV, EQ. Quod erat demonstrandum.

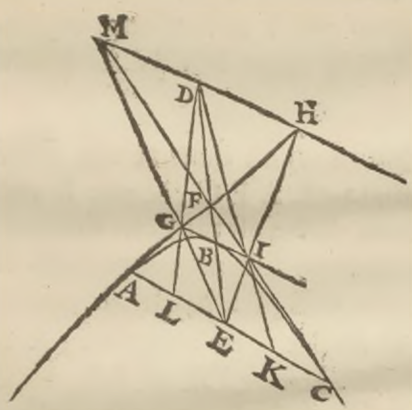
Idem demonstrari potest adsumptis triangulis GSH, CSV, ESQ similibus & ad verticem oppositis. Cùm enim ob æquales FE, EQ, seu MD, DS. æquales sint GA, AH, bisecat AS rectam GH, quare & omnes in eodem triangulo GSH ipsi

GH

GH parallelas bisecabit nempe CV. in simili quoque ad verticem opposito ESQ producta ASZ bisecabit EQ parallelam GH. vt in tribus figuris cernere licet ducta linea recta ab A puncto ad punctum M, & producta ad FQ. *Omisit Sculptor in figuris prop. 6. lineas ab A per M, S ad FQ ductas, sed videatur prop. 11. quæ eadem est.*

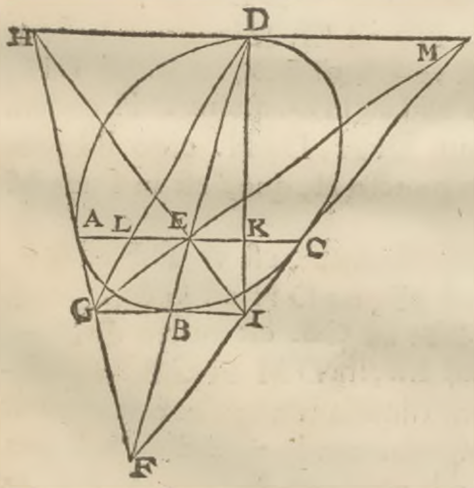
PROPOSITIO X.

THEOREMA.



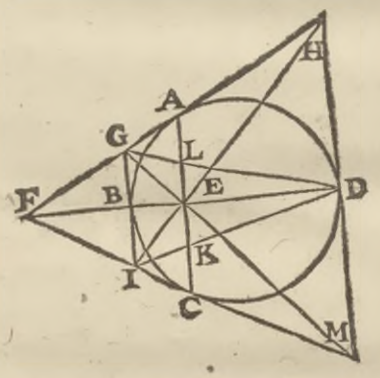
SI in hyperbola, ellipsi vel circuli circumferentia quæuis ducatur diameter, & ad ipsam in sectione ordinata; per terminum verò diametri, qui in sectione, ducatur recta sectionem tangens; & per ordinatæ terminos tangentes deinde ducantur quæ tangenti per diametri terminum ductæ occurrant. Si à puncto diametri, ad quod ordinata in sectione ducta est, ducatur recta linea per binarum tangentium occursum, productæ tangenti, quæ per alterum terminum ordinatæ ducta est, occurret in linea, quæ ab altero diametri termino ordinata in sectione æquidistans ducta erit.

DEMONSTRATIO.



SIT in hyperbola ABC vel in ellipsi aut in circulo ducta diameter quæuis DBE intra sectionem, & ad ipsam in sectione ordinata recta AEC, quæ propterea bisecta erit in E. per B verò terminum diametri, qui in sectione, ducatur recta GBI, sectionem vel circulum contingens, quæ propterea æquidistabit ordinatæ AC. per terminos deinde ordinatæ,

nempe A & C, ducantur tangentes CIF, AGF, quæ tangenti GBI, quæ per B ducta eſt, occurrant in punctis GI. Dico, quòd ſi ab E puncto diametri, ad quod in ſectione ordinata ducta eſt, per I punctum, binarum tangentium GBI, FIC occurſum, ducatur in hyperbola recta EIH, vel EGM; in ellipſi verò & circuli circumferentia ducta EI vel EG ad alteram partem producatur EH vel EM, ipſa productæ tangenti, quæ per alterum ordinatæ terminum ducta eſt, occurret in linea H D M, quæ per D alterum diametri terminum æquidiſtans ordinatæ AC ducta erit. Id eſt EIH, quæ per I occurſum tangentium GBI, CIF tranſit, occurret AH in linea MDH. & EGM occurret CIM in linea MDH.



Quoniam ad diametrum DBF ordinata eſt AEC, & per B terminum ducta eſt tangens GBI ordinatæ æquidiſtans, erunt inter ſe æquales GB, BI. & quia à punctis A, C ductæ ſunt tangentes A G F, CIF. erit vt DE ad BE, ita D F ad FB. ſed eſt etiam vt DF ad BF, ita DM ad BG in hyperbola: ab æquali erit vt DE ad BE, ita DH ad BG vel BI ipſi æqualem. & inuertendo vt BE ad DE, ita BI vel BG ad D H. ducta eſt ab E per I recta EIH, ergo in triangulo DEH ob parallelas BI, DH erit vt DE ad BE, ita HE ad EI. & inuertendo vt B E ad DE, ita EI ad HE. ſed eſt vt EB ad ED, ita BI ad DH, erit ab æquali vt EI ad IB, ita EH ad HD. quare D H eadem eſt baſis communis triangulorum DFH, DEH. ergo EI producta occurrit productæ AF in puncto H, quod eſt in linea M DH. Quod propoſitum erat.

In ellipſi verò & circuli circumferentia, eſt vt DF ad BF, ita DE ad EB, vt autem DF ad BF, ita D H ad G B, ergo ab æquali erit vt DE ad EB, ita DH ad GB. eſt autem DH æqualis DM. erit ergo vt DE ad EB, ita D M ad G B. æquidiſtant autem DM, GB. ſunt ergo ſimilia triangula. erit ergo vt DE ad EM, ita EB ad EG, & permutando vt DE ad E B, ita ME ad EG, ſúntque æquales ad verticem DEM, GEB, &

DB eſt vna linea. quare GEM vna linea erit, quæ occurret tangenti FCM productæ in linea HDM. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XI.

THEOREMA.

ISDEM *poſitis, ſi ab altero diametri termino rectæ ducantur ad occurſum binarum tangentium, & ad ordinatam ad diametrum producantur, ipſam ordinatam ad diametrum biſecabunt.*

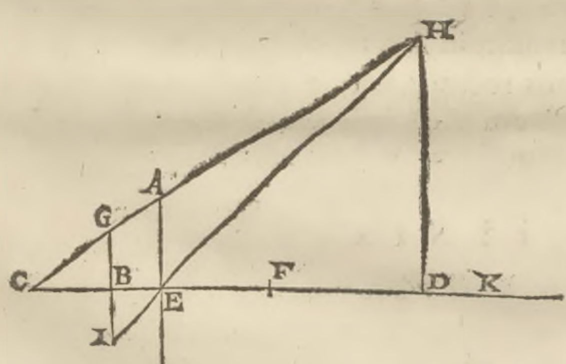
DEMONSTRATIO.

AB altero diametri termino nempe D, ad puncta I, G contingentium occurſus ducantur rectæ DGL, DIK. Dico, quòd AE vel CE ordinatam ad diametrum biſecant in punctis L K.

Cùm enim intra eaſdem parallelas triangula AHE, LDE conſtituta ſint, erit vt DE ad DB, ita HA ad HG; vt autem HA ad HG, ita AE ad GI. & inuertendo vt HG ad HA, ita GI ad AE. vt autem HG ad HA, ita DB ad DE. & vt DB ad DE, ita GB ad LE. ab æquali erit vt GB ad LE, ita GI ad AE. ſed GB ſemiſſis eſt GI. quare & LE ſemiſſis erit AE. ergo DGL, vel DIK biſecat AE, vel CE. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XII.

THEOREMA LOCALE.



SIT *data linea BK interminata, & ad ipſius terminum B perpēdicularis vtrinque ducatur GBI. ſiántque æquales GB, BI. & ad aliud punctum E ducatur perpendicularis AE, quæ maior ſit quàm BG. deinde per puncta GA ducatur quantumlibet producta GAH; & à puncto I ducatur per E recta*

IE quantumlibet producta donec occcurrat GA productæ, verbi gratia in H. denique à puncto occursus H ad productam quantumlibet BK ducatur perpendicularis HD, quæ æquidistabit GB, AE. Dico quòd punctum A pertinet ad circulum vel ellipsim, cuius diameter vel axis transuersus est BD positione datus, & magnitudine determinatus à perpendiculari HD.

DEMONSTRATIO.

BISECETVR BD in F; & producantur HG, DB, quæ concurrant in C, & faciant triangulum rectangulum HCD. cùm itaque sint æquales GB, BI, & æquidistent inter se GB, HD, erit vt DE ad DH, ita EB ad BI. & permutando, vt DE ad EB, ita HD ad GB. erit ergo ab æquali, vt DE ad EB, ita DC ad BC. & componendo, vt DB ad DE, ita DC, CB ad BC. iterúmque permutando, vt DB ad DC, CB, ita BE ad BC. & antecedentium adsumptis semissibus, erit vt FB ad FC, ita BE ad BC. & permutando, vt FB ad BE, ita FC ad BC. & per conuersionem rationis, vt FB ad FE, ita FC ad FB. Quadratum ergo FB æquale est rectangulo CFE.

Quia ergo est vt CF ad FB, seu FD ad FE; erit componendo, vt CD ad FD, ita DE ad FE. & permutando vt CD ad DE, ita FD seu BF ad FE; & per conuersionem rationis, vt DE ad EC, ita EF ad EB. est igitur rectangulum DEB æquale rectangulo CEF. Quare si quadratum AE æquale est rectangulo CEF, erit A punctum in circumferentia circuli cuius semidiameter est BD. si verò quadratum AE maius fuerit rectangulo CEF vel BED, erit A punctum in ellipsi, cuius latus rectum erit ad transuersum, vt rectangulum CEF ad quadratum AE. Si verò minus fuerit quadratum AE rectangulo CEF vel BED, erit in ellipsi, cuius latus rectum erit ad transuersum, vt quadratum AE ad rectangulum CEF. per ea quæ demonstrata sunt prop. 38. lib. 1. Conic. Apollonij. Quod erat demonstrandum.

FINIS.

EXERCITATIO III.

AD LECTOREM.

HANC de porismatibus scriptiunculam data mihi occasione composui, cùm ante biennium vir illustrissimus ac amplissimus Dominus de Fermat in suprema Curia Tholosana Senator integerrimus & in iudiciis exercendis peritissimus, rerum Mathematicarum doctissimus, propositiones quasdam subtilissimas & porismata quæ tam theorematicè quàm problematicè proponi possunt, ad amicos suos huc misisset. Ex Pappi vnius monumentis & collectionibus Mathematicis porismatum naturam & vsum discere possumus, cùm ex veteribus qui hanc Geometriæ partem attigerunt, præter ipsum nullus supersit. Illius tamen sententia legenti statim obuia non est; textúsque corruptione, & applicationis porismatum defectu obscurior proculdubio euadit. Interea dum tanto viro sua edere libuerit, nostra, qualiacumque tandem sint, publici iuris facere placuit; vt alios ad eorundem inuestigationem impelleremus; ipsúmque Amplissimum Dominum de Fermat, ad sua edenda, vtinam & ad alia sublimis intellectus sui εὑρήματα cum omnibus communicanda, excitaremus. Is enim est, quem omnes Europæ Mathematici suspiciunt; quem à subtilissimis ætatis nostræ Geometris Bonauentura Cauallerio Bononiæ, & Euangelista Torricello Florentiæ summis laudibus in cœlum ferri, eiúsque inuenta mirabilia prædicari auribus meis audiui. quem etiam virum tam eximiis virtutibus clarum, multáque eruditione ornatum, ac in rebus Mathematicis oculatissimum toto pectore veneror ac colo.

TRACTATVS BREVIS
DE PORISMATIBVS.

INTER antiquorum Geometrarum libros, qui ad locum reſolutum pertinebant, recenſet Pappus Poriſmatum opus ab Euclide tribus voluminibus elaboratum: hiſque verbis commendat, *perutile ad reſolutionem obſcuriorum Problematum, ac eorum generum, quæ non comprehendunt eam, quæ multitudinem præbet, naturam.* Pappi Græca verba à Commandino in Latinum ſic verſa ſunt, quibus ſanè magna obſcuritas ſubeſt, ita vt eorum ſenſum penetrare obuium aut facile non ſit. ídque aut propter Græci textus corruptionem & interpolationem, aut propter interpretis vitioſam verſionem contigit. vix enim intelligi queunt iſta genera, naturam non comprehendentia, quæ præbet multitudinem: ac præterea quæri poteſt, cuiuſnam rei multitudinem hîc indicare Pappus voluerit. Huius autem Græcus textus ab Illuſtriſſ. viro in bonæ notæ Manuſcriptis membranis olim viſus ſic ſe habebat, πορίσματά ἐστι πολλοῖς ἄθροισμα, φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος. quæ lectio differt ab ea, quam habuit Commandinus in Codice Manuſcripto, quo ipſe vſus eſt. non obmiſſurus quippe erat verſionem horum verborum, πορίσματά ἐστι πολλοῖς ἄθροισμα. φιλοτεχνότατον, neque etiam legit in recto caſu ἀπερίληπτον, ſed ἀπεριλήπτων in ſecundo ſeu genitiuo. attamen, ſi Manuſcriptus liber, quo vſus eſt, habuit ἀπεριλήπτων, malè vertit, *quæ haud comprehendunt*, debuit enim, *quæ haud comprehenduntur*, ſcribere. In huius quoque definitionis membro altero, καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος, videtur deeſſe aliquid; cuius enim φύσιν hîc intelligat, quæri poteſt; & videtur ad poriſmatum, quæ hîc definiuntur, & quorum efficacia commendatur, naturam retuliſſe; quare legendus ſic mihi videretur iſte locus; πορίσματά ἐστι πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων, καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως αὐτῶν παρεχ-

μβρης πλῆθος, quæ Latinè ſic reddi queunt : *Poriſmata à multis ſic intelliguntur, vt artificioſa collectio ſit* (propoſitionum nempe) *ad analyſim grauiorum ſeu difficiliorum problematum, & generum, incomprehenſibilem multitudinem præbente ipſorum* (poriſmatum) *natura.* verùm neque adhuc clarus eſt horum verborum ſenſus. Vir eruditiſſimus huius loci ſenſum ſic explicat, *Poriſmata conferre ad analyſim obſcuriorum problematum, & generum* (hoc eſt problematum generalium) ex dictis enim apparet poriſmatum propoſitiones eſſe generaliſſimas, deinde ſubiungit Pappus, *cùm natura multitudinem, quæ vix poteſt animo comprehendi, ſubminiſtret;* quibus verbis infinitas illas & miraculo proximas eiuſdem problematis indicat ſolutiones. Meritò dubitare poteſt quiuis an τὸ γένος vſurparit Pappus pro γενικωτάτων; & an ſubaudienda ſit vox ἀναλύσεων, velítque dicere poriſmata ex natura ſua multitudinem ſolutionum eiuſdem problematis præbere.

Ex illis verbis corruptis proculdubio & obſcuris naturam poriſmatum elicere non poſſumus. conſtat ſolummodo fuiſſe propoſitiones ad analyſim perficiendam collectas & valde vtiles, obſcuriorúmque problematum reſolutioni lucem maximam attuliſſe. Ideo verò ait vniuerſalem habere poriſmata contemplationem, quòd eodem ſemper modo ſe habeant, & ad multa ſe extendant.

Pergit porro Pappus: *horum autem ſpecies omnes neque theorematum ſunt, neque problematum, ſed mediam quodammodo inter hæc formam ac naturam habent, ita vt eorum propoſitiones formari poßint vt theorematum, vel vt problematum. quo factum eſt, vt ex multis Geometris alij quidem ea genere eſſe theoremata, alij verò problemata opinati ſunt, dum ad ſolam tantùm propoſitionis formam reſpicerent.* Quibus docet inter quas propoſitiones referri poſſint Poriſmata, & inter theoremata ac problemata medium locum tenere dicit; quam verò ob rationem mediæ ſint, tradit, quia formari poſſunt illæ vt theoremata, quæ in ſola contemplatione rei ὅτι ἐστι, vel τοῦ διότι, aut proprij alicuius, quod ipſi ineſt, verſatur. quia efferri quoque poſſunt vt problemata, in quibus aliquid effici aut reperiri imperatur; neutrius verò naturam induunt, niſi quantum ad enunciationis formam externam, quæ accidentalis ipſis eſt. Quoniam verò theoria vtpote natura ſimplicior, prior eſt effectione, theoremata etiam antecedent problemata; quæ verò

media sunt, succedent theorematibus, & priora problematibus erunt; atque adeo per ipsa, vtpote media ad finem, à theorematibus ad problemata progrediemur. Quare & porismatum natura talis erit, vt à theoria ad effectionem tendat; & rationem modúmque ostendat efficiendi id, quod theoremate demonstratur ὅτι ἐστι. Hæ itaque propositiones, dum considerantur vt media ad finem, pura theoremata non sunt, quoniam efficiendi modum exhibent; non sunt etiam pura problemata, quia nondum in ipsis efficitur propositum, sed solummodo ad illud alio in loco efficiendum afferuntur. Hæcque nostra explicatio Pappi verbis sequentibus accommodata videtur. arguit enim Geometras illos recentiores, qui porismata in theorematum aut problematum genus retulerunt, ostendítque eos rem bene non cepisse. *Horum autem*, inquit, *trium differentiam veteres multò meliùs cognouisse ex definitionibus perspicuum est. Dixerunt enim theorema esse, quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema, quod affertur in constructionem propositi. Porisma verò, quod proponitur in porismum, hoc est in inuentionem & inuestigationem propositi.* Ex qua porismatis definitione colligere possumus, veteres Geometras eo nomine propositiones aliquas connotasse, quatenus ad effectionem & inuentionem dirigebantur, & rationem efficiendi problematis continebant, adeóque esse vt media ad finem. Quare tales etiam propositiones seorsim acceptæ, nec ad inuentionem quæsiti, & effectionem problematis, cui inueniendo inseruire possunt, adhibitæ, porismata ampliùs non erunt, sed pura theoremata. Quòd verò rationem cuiusdam effectionis contineant, in problemata conuerti poterunt, quibus aliquid efficietur. Quod effectum, si ad aliud, vt medium ad finem, adplicabitur, problema sine ipso haud facilè efficiendum absoluet; & porismata propositiones illæ tunc erunt & dicentur.

Addit præterea Pappus: *Immutata est autem hæc porismatis definitio à iunioribus, qui nequeunt omnia inuestigare, sed his elementis vtuntur, & ostendunt solummodo quòd hoc est quod quæritur, non autem illud ipsum inuestigant. cúmque & ex definitione ipsa, & ex iis, quæ nobis tradita sunt, redarguerentur, ab accidente sic porisma definierunt: Porisma est, quod hypothesi deficit à locali theoremate.* Hæc Pappus *de porismatis definitione & natura. pauca equidem, intellectu difficilia, tenebrísque inuoluta; ex his verò postremis sensum elicere conabimur.*

Immu-

Immutatam à iunioribus poriſmatis definitionem queritur; & huius immutationis cauſam tradit; quòd ſcilicet omnia poriſmata inueſtigare non poſſent, quæ adferri debent ad inuentionem propoſiti; quare oſtendebant ſolummodo quod hoc eſt quod quæritur, nec illud inueſtigabant, quam ob cauſam etiam effectionem geometricam non adſequebantur. Cùm itaque non inueſtigarent, quia id præſtare non poterant, propoſitionum illarum naturam, quæ in poriſmum, ſeu propoſiti inuentionem afferuntur, non viderunt mediam eſſe inter theorematis ac problematis naturam, & connectere theoriam cum effectione; quia ſcilicet per id, quod illis propoſitionibus efficitur, problema propoſitum abſoluitur; & illa verba, *ſed his elementis vtuntur*, ſic intelligenda eſſe videntur, vt iuniores illi Euclidæis poriſmatibus, vt elementis vſi ſint, non vt propoſitionibus, quæ ad effectionem immediatè deducebant. Ignorarunt itaque naturam, quia neſcierunt vſum & finem; illas itaque propoſitiones non cenſuerunt proponi in poriſmum, ſeu ad inueſtigationem propoſiti. At cùm redarguerentur ab antiquorum Geometrarum ſectatoribus & eruditis, qui propoſitiones illas medias eſſe oſtendebant, quòd ad propoſiti inuentionem adferrentur, & effectionem problematis perficerent, & ideo ab antiquis rectè eſſe definitas, aliam commenti ſunt poriſmatis definitionem, & dixerunt *Poriſma eſſe, quod hypotheſi deficit à locali theoremate*, id eſt eſſe propoſitionem, in qua pauciora data ſupponerentur, quàm in locali theoremate. quod locale theorema eſt, vt mihi videtur, propoſitio in qua oſtenditur aliquid in tali loco eſſe, & ad eum pertinere, vt punctum illud eſſe in linea, circulo, parabola, &c. Illam lineam pertinere ad circulum, parabolam, &c. Tota ergo quæſtio verſabatur inter iuniores & veterum aſſertores de modo definiendi poriſmatis: illas propoſitiones quin iuniores cognorint non eſt dubium, ſed earum naturam malè explicarunt, cùm non animaduerterent quem ordinem ac locum in analyſi ac ſyntheſi tenerent, aliáſque proprietates à Pappo indicatas non cernerent.

Proclus in Euclidem lib. 3. poriſma ſic definiuit, τὸ δὲ πόρισμα λέγεται μὲν καὶ ἐπὶ προβλημάτων τινῶν, οἷον τὰ Εὐκλείδῃ γεγραμμένα. λέγεται δὲ ἰδίως ὅταν ἐκ τῶν ἀποδεδειγμένων ἄλλο τι * συναφανῇ θεώρημα μὴ προθεμένων ἡμῶν. ὃ καὶ διὰ τοῦτο πόρισμα κεκλήκασι ὥσπερ τι κέρδος ὂν τῆς ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως. *Poriſma etiam de quibuſdam proble-*

* συναναφανῇ

matibus dicitur, qualia ſunt ab Euclide conſcripta poriſmata. propriè verò talia dicuntur quando ex demonſtratis aliud quodlibet theorema nobis non proponentibus emergit & offertur; quod propterea poriſma appellarunt, quaſi lucrum ex ſcientifica demonſtratione obiter & præter expectationem factum.

Longè differt hæc definitio ab ea quam attulit Pappus. notat enim Proclus poriſma ab accidente, & ex eo dictum eſſe vult, quòd obiter & aliud agendo nouum theorema lucrifaciamus. At veteres ab ipſius ordine in analyſi & ſyntheſi & à fine ad quem dirigitur, ipſum definierunt. poterit tamen & deſcriptio Procli poriſmati conuenire, ſiquidem in analyſi nouus locus aliquando patefit, & nouum theorema, ex quo immediatè problematis ſolutio petenda eſt, quo ignoto non inueniretur quæſitum.

Quamuis igitur à veterum definitione aliquomodo recedere videatur vir eruditiſſimus in his quæ dicit, *ſed cùm ex ſuppoſito loco & cognito alium locum venamur, nouus iſte locus poriſma vocatur ab Euclide*, conciliari tamen poterit eius ſenſus, qui idem eſt ac Procli, cum veterum placitis; dummodo concedat locum illum ſecundum, quem venamur, ideo ſecundum appellari, quòd in analyſi peracta offeratur demonſtrandus ac inueniendus, & ad inueſtigationem propoſiti afferendus; tunc enim erit poriſma, & propoſitio quæ aliquando deficiet hypotheſi à locali theoremate; id eſt in qua non tot ſupponentur ac in analyſi, quæ theorema eſt illius, quod ſyntheſi demum problema efficitur.

Notandum quoque eſt Pappum non omnibus poriſmatibus, ſed quibuſdam tantùm, accidens illud, per quod iuniores poriſma vniuerſaliter definierunt, tribuiſſe; quod apertè dicit his verbis, *huius autem generis poriſmatum* (quæ deficiunt hypotheſi à locali theoremate) *loci ipſi ſunt vna ſpecies; atque de hac ipſa abundè tractatur in reſoluto loco, ſeorſum autem à poriſmatibus collecta, inſcriptáque ac tradita ſunt, quòd magis diffuſa ac copioſa ſit cæteris ſpeciebus.* Quare iuxta Pappi ſententiam in definiendo vniuerſaliter poriſmate errauerunt adhuc iuniores, cùm differentiam ex accidenti ſpecifico ad totum genus definiendum adſumpſerint. Sunt itaque poriſmata, quæ non deficiunt hypotheſi à locali theoremate, at horum ſpecies ad pauciora ſe extendit. Vnum addo, periodi ſequentis membrum primum corruptum videri, quod ſic vertit Commandinus, *Locorum igitur ſpecies ſunt decem*. habuit itaque textus Græcus τῶν τόπων οὖν εἴδη ἐστὶ δέκα, ſed quatuor

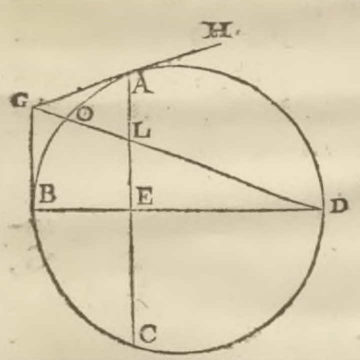
tantùm enumerat, & ſanè plures non ſunt. ſcriptum olim proculdubio erat ἄδη ἐστὶ δα nota numerali quæ quaternarium deſignat, quia δ quartum eſt in alphabeti ſerie. aliquando decem, quia litera initialis eſt τοῦ Δέκα, vnde ἀμφιβολία nata eſt.

Exemplum itaque hîc proponemus, vt clarior explicatio ſuperiùs poſita fiat.

PROBLEMA.

DATO circulo ABCD, in eóque poſitione datis diametro BD & ſubtenſa OD, quæ diametri datæ terminum D attingat. oportet ad diametrum BD lineam ſubtenſam ordinatam applicare, quæ à data ſubtenſa OD ita ſecetur, vt rectangulum ſub tota ordinata & minori ipſius ſegmento æquale ſit quadrato dimidiæ.

ANALYSIS.



SIT factum. & ducta ſit ſubtenſa AC, ad diametrum BD ordinatim applicata, & à ſubtenſa OD ita ſecta in L, vt rectangulum ſub tota AC, & minori ſegmento AL æquale ſit quadrato dimidiæ AE. eſt igitur rectangulum CAL æquale quadrato AE; propterea talis erit proportio, vt CA ad AE, ita AE ad AL. ſed AE ſubdupla eſt totius CA, ergo & AL ſubdupla erit eiuſdem AE, & ſubquadrupla totius CA. Huc vſque, non vltrà, procedit analyſis, cùm proportio, quam tenent inter ſe CA, AE, AL, inuenta ſit.

SYNTHESIS.

Componetur itaque, ſi ita applicetur AC ſubtenſa ad BD diametrum, vt AL ſit ſemiſſis AE vel quadrans totius AC. ex alio itaque problemate priùs efficiendo dependet ſolutio problematis propoſiti. in huius itaque poriſmum, id eſt ad acquiſitionem ſeu effectionem propoſiti problema aliud, nempe ſequens proponi debet, quod erit:

PORISMA.

DATO circulo ABCD, in eóque poſitione datis diametro BD, & ſubtenſa OD, quæ ad diametri terminum D pertingat, oportet ad BD applicare rectam AE, quæ à ſubtenſa OD biſecetur in L.

Hæc autem propoſitio talis eſt, vt enunciari velut theorema poſſit, quod tale erit.

THEOREMA LOCALE.

SI in circulo ABCD quauis ducatur diameter BD, & ad ipsam ordinata AE; per B verò terminum diametri tangens BG, & per A terminum ordinatæ AE ducatur tangens AG, quæ tangenti BG occurrat in G. & à puncto D termino diametri ad G punctum occursus tangentium ducatur DLOG, hæc bisecabit AE in puncto L. vt suprà demonstratum est Exercitationis 2. prop. 11. Theorema locale est, quo punctum bisectionis AE ostenditur in subtensa ducta à G occursu tangentium ad D diametri BD terminum. resoluatur itaque porisma, quatenus problematicè propositum est.

PORISMATIS, VT PROBLEMATIS ANALYSIS.

SIT factum; & ducta AE ordinata ad BD, quæ à subtensa DO bisecta sit in L. producta ergo DO, & ad punctum B termini diametri ducta tangente BG, quæ in puncto G occurrat productæ DO. si à puncto G occursu rectarum DG, BG ducatur GA tangens circulum, occurret ipsa rectæ AE in puncto contactus A; quod in superioribus demonstratum est.

SYNTHESIS.

Componetur itaque hoc modo. producatur DO & ad punctum B ducatur tangens BG, quæ occurrat DO productæ in G, & à puncto G ducatur GH, quæ circulum contingat in A. tandem à puncto A ducatur subtensa AE ad diametrum BD ordinata & æquidistans BG. per ea, quæ superiùs demonstrata sunt, erit effectum problema, erítque AE bisecta in L à subtensa BO. Effectum igitur hoc secundum problema, necessariò afferendum erat in porismum, id est ad acquirendum & efficiendum illud quod primo loco propositum erat, quódque effici nequibat nisi hoc alterum priùs effectum fuisset. ex quibus manifesta fit natura porismatis, quæ talis est vt medium necessarium sit ad finem. Cuius etiam hoc proprium est, vt in forma theorematis, aut in forma problematis enunciari possit.

Hoc nostrum etiam porisma hypothesi deficit à locali theoremate prædicto, in quo plura supponuntur quàm in porismate. Ad huius itaque exemplum plurima inquiri poterunt porismata, quæ reperta vel Euclidis opus restituent, vel cum Euclidæis porismatibus eadem erunt.

FINIS.

ISMAELIS